

Compléments sur les conditions aux bords 7

1 Condition de Neumann non homogène

Nous voulons maintenant être capable de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.1)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. Soit \mathcal{T}_h une triangulation du domaine Ω . Notons $(T_l)_{l=1,L}$ les triangles de \mathcal{T}_h , $(S_i)_{i=1,N}$ les nœuds du maillage et $(\varphi_i)_{i=1,N}$ les fonctions de base associées à \mathcal{T}_h dont on note l'espace vectoriel engendré V_h .

Exercice 1.

1. Proposez une formulation variationnelle pour (7.1) et montrez que le problème est alors bien posé.
2. Proposez une fonction u solution de (7.1) pour une fonction f à préciser.
3. Discrétisez (7.1).

Exercice 2.

1. Définissez une fonction qui prend en argument une arête ainsi qu'une fonction g , et qui renvoie la matrice élémentaire surfacique, associée aux termes du type :

$$\int_E g(x) \varphi_i(x) dx.$$

Afin de ne pas altérer la précision de notre méthode, une règle de quadrature d'ordre au moins 1 sera nécessaire.

2. Vérifiez votre fonction sur un exemple simple.
3. Implémentez la boucle d'assemblage de la matrice associée au terme surfacique dans le second membre.

Exercice 3.

→ Étudiez le taux de convergence de l'erreur par rapport à votre solution de référence en fonction de la finesse du maillage.

2 Condition de Robin/Fourier

On s'intéresse cette fois au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.2)$$

où $f \in L_2(\Omega)$ et $g \in L_2(\partial\Omega)$. Nous prenons les mêmes notations que précédemment concernant la discrétisation.

Exercice 4.

→ Comme précédemment, proposez une formulation variationnelle pour (7.2) et montrez que le problème est alors bien posé, proposez une solution de référence et discrétisez.

Exercice 5.

1. Calculez les termes suivants pour tout $1 \leq i, j \leq N$

$$\int_E \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy$$

où $E = [a, b]$ est une arête de la triangulation.

2. Définissez une fonction qui prend en argument une arête et qui renvoie la matrice élémentaire surfacique associée aux termes calculés précédemment.
3. Vérifiez votre fonction sur un exemple simple.
4. Implémentez la boucle d'assemblage de la matrice associée au terme surfacique dans la forme bilinéaire.

Exercice 6.

→ Étudiez le taux de convergence de l'erreur par rapport à votre solution de référence en fonction de la finesse du maillage.

3 Condition de Dirichlet non homogène**Idée**

Nous nous intéressons au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = h & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.3)$$

où $f \in L_2(\Omega)$ et $h \in L_2(\partial\Omega)$. Encore une fois, l'application de conditions de Dirichlet sera assez différente de ce que nous avons vu précédemment. Pour mieux comprendre ce qui va se passer du point de vue algébrique, nous allons prendre un point de vue plus théorique. On supposera que nous connaissons l'expression analytique de h .

Soit \mathcal{T}_h une triangulation du domaine Ω . Notons $(T_l)_{l=1,L}$ les triangles de \mathcal{T}_h , $(S_i^0)_{i=1,d}$ les nœuds sur le bord du maillage, $(S_i^{int})_{i=1,N}$ les nœuds à l'intérieur du maillage, $(S_i)_{i=1,N+d}$ l'ensemble des nœuds, $(\varphi_i^0)_{i=1,d}$ les fonctions de base P^1 associées aux nœuds du bord dont on note l'espace vectoriel engendré V_h^0 , $(\varphi_i^{int})_{i=1,N}$ les fonctions de base P^1 associées aux nœuds à l'intérieur du maillage dont on note l'espace vectoriel engendré V_h et $(\varphi_i)_{i=1,N+d}$ l'ensemble des fonctions P^1 associées au maillage.

Introduisons $w \in V_h$ telle que

$$w(S_i^0) = h(S_i^0) \quad \forall 1 \leq i \leq d \quad \text{et} \quad w(S_i^{int}) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq N. \quad (7.4)$$

On dit alors que w est un relèvement dans V_h de g . Nous pouvons noter alors

$$u = z + w \quad z \in V_h^0. \quad (7.5)$$

Exercice 7.

→ Déduisez en la formulation variationnelle issue de (7.3) où l'on cherchera $z \in V_h^0$, puis le système linéaire associé.

Application

Supposons que nous numérotions d'abord les nœuds intérieurs, puis extérieurs (ce que nous pouvons toujours faire à l'aide de permutations). Le système linéaire assemblé avec des conditions de Neumann homogène s'écrit

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^T & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}.$$

où Z correspond aux degrés de liberté intérieurs et W à ceux sur le bord du domaine.

Exercice 8.

→ Vérifiez que la première ligne correspond au système linéaire de l'exercice 6.

En réalité, les degrés de liberté associés aux nœuds du bord sont contraints par la condition $u = h$ sur le bord, nous pouvons donc écrire directement :

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ H \end{pmatrix}.$$

L'inconvénient maintenant est que si la matrice globale était symétrique, elle ne l'est plus a priori. Nous pouvons donc faire la simplification suivante :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 - BH \\ H \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.

1. Définissez une fonction qui assemble le second membre et modifie la matrice globale pour prendre en compte les conditions de Dirichlet homogènes.
2. Étudiez le taux de convergence de l'erreur par rapport à votre solution de référence en fonction de la finesse du maillage.

Variante

La méthode vue précédemment est une généralisation de la méthode de pseudo-élimination pour $h \neq 0$. De la même façon, nous pouvons généraliser la méthode de pénalisation exacte. La seule différence est que nous devons remplacer les éléments du second membre associés aux degrés de liberté du bord, par la valeur de h à ces nœuds multipliée par la *tg*.

Exercice 10.

→ Implémentez la méthode de pénalisation exacte pour des conditions de Dirichlet non homogène et comparez vos résultats avec ceux obtenus à l'aide de la pseudo-élimination.