

# Méthodes des éléments finis - assemblage 4

---

## Objectifs de la séance :

- Débuter la mise en œuvre de la méthode des éléments finis.
- Calculer les matrices élémentaires pour les matrices de masse et de rigidité.
- Implémenter les routines d'assemblage de ces dernières.

## 1 Problème considéré

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{n}$  le champs de vecteur normal à  $\partial\Omega$  dirigé vers l'extérieur de  $\Omega$  et  $f \in L^2(\Omega)$ . Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

### Exercice 1 (Formulation variationnelle).

- Proposez une formulation variationnelle pour le problème (4.1) et montrez que celle-ci est bien posée.

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation du domaine  $\Omega$ . Notons  $(T_l)_{l=1,L}$  les triangles de  $\mathcal{T}_h$ ,  $(S_i)_{i=1,N}$  les nœuds du maillage et  $(\varphi_i)_{i=1,N}$  les fonctions de base associées à  $\mathcal{T}_h$  dont on note l'espace vectoriel engendré  $V_h$ .

### Exercice 2 (Formulation variationnelle discrétisée).

- Proposez une formulation variationnelle discrète pour le problème (4.1) et montrez que celle-ci est bien posée.

Par construction, la solution approchée  $u_h$  a la forme suivante : pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N u_h^i \varphi_i(\mathbf{x}).$$

### Exercice 3 (Système linéaire).

1. Mettez la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire :

$$(\mathbb{M} + \mathbb{K})\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.2)$$

où  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{K}$  sont des matrices carrées de taille  $N$  tandis que  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{f}$  sont des vecteurs de taille  $N$ .

2. Donnez des propriétés intéressantes de  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{K}$ . Ces propriétés pourront notamment être utilisées pour vérifier l'assemblage des matrices.

## 2 Assemblage des matrices et du second membre

### Matrice de masse

Soit un triangle  $T_l$  de sommets  $S_1(x_1, y_1)$ ,  $S_2(x_2, y_2)$  et  $S_3(x_3, y_3)$ . Les coordonnées barycentriques  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  du triangle ont pour expression :

$$\begin{aligned}\lambda_1(x, y) &= \frac{1}{D}(y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3)) \\ \lambda_2(x, y) &= \frac{1}{D}(y_{31}(x - x_1) - x_{31}(y - y_1)) \\ \lambda_3(x, y) &= \frac{1}{D}(y_{12}(x - x_2) - x_{12}(y - y_2))\end{aligned}$$

où  $x_{i,j} = x_i - x_j$ ,  $y_{i,j} = y_i - y_j$  pour  $i, j$  entre 1 et 3, et  $D = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}$ . Remarquez que  $D$  est égale à deux fois l'aire du triangle au signe près.

**Exercice 4** (Matrice élémentaire - matrice de Masse). Soit  $T$  un triangle de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ .

1. Calculez les termes suivants pour tout  $1 \leq i, j \leq N$

$$\int_T \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy$$

2. Définissez la fonction **MassElem** qui prend en argument trois points et qui renvoie la matrice de Masse élémentaire associé au triangle  $T$  formé de ces trois points :

$$\mathbb{M}_T = \left( \int_T \varphi_i \varphi_j \right)$$

où  $\varphi_i$  est la fonction de base  $P^1$  associée au nœud  $i$ .

3. Vérifiez que vous trouvez bien les bonnes valeurs pour un triangle de référence.

**Exercice 5** (Assemblage - matrice de Masse).

1. Implémentez la boucle d'assemblage de la matrice  $\mathbb{M}$ .
2. Vérifiez que vous retrouvez bien les propriétés remarquables de cette matrice.

## 3 Matrice de rigidité

**Exercice 6** (Matrice élémentaire - matrice de rigidité).

1. Calculez les termes suivants pour tout  $1 \leq i, j \leq N$

$$\int_{T_l} \nabla \varphi_i(x, y) \cdot \nabla \varphi_j(x, y) dx dy$$

2. Définissez la fonction **RigElem** qui prend en argument trois points et qui renvoie la matrice de rigidité élémentaire associé au triangle  $T$  formé de ces trois points :

$$\mathbb{K}_T = \left( \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \right)$$

où  $\varphi_i$  est la fonction de base  $P^1$  associée au nœud  $i$ .

3. Vérifiez que vous trouvez bien les bonnes valeurs pour un triangle de référence.

**Exercice 7** (Assemblage - matrice de rigidité).

1. Implémentez la boucle d'assemblage de la matrice  $\mathbb{K}$ .
2. Vérifiez que vous retrouvez bien les propriétés remarquables de cette matrice.

## Second membre et convergence

Nous définissons l'opérateur d'interpolation  $I_h$  sur le maillage  $\mathcal{T}_h$  de la façon suivante :

$$I_h : C_0(\Omega) \rightarrow V_h$$

$$f \mapsto I_h f = \sum_{i=1}^N f(S_i) \varphi_i.$$

Nous admettons alors le résultat suivant :

**Théorème 1** (Erreur d'interpolation). Il existe des constantes  $C_0$  et  $C_1$  indépendantes de la finesse du maillage  $h$ , telle que pour toute fonction  $f \in H^2(\Omega)$

$$\|f - I_h f\|_{L_2(\Omega)} \leq C_0 h^2 |f|_{H^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad |f - I_h f|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 h |f|_{H^2(\Omega)}.$$

**Exercice 8** (Convergence).

→ En utilisant le théorème précédent et le lemme de Céa, démontrez une convergence d'ordre 1 avec la semi-norme  $H_1$  de la solution approximée vers la solution exacte, si celle-ci est assez régulière, c'est-à-dire

$$|u - u_h|_{H_1(\Omega)} \leq Ch |u|_{H^2(\Omega)},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

**Exercice 9** (Second membre).

→ On assimilera la fonction  $f$  à son interpolée  $P^1$ , déduisez une expression de  $\mathbf{f}$  faisant intervenir la matrice de masse.

## 4 Résolution du problème

Pour contrôler l'assemblage de nos matrices, nous pouvons résoudre un problème dont nous connaissons la solution afin de vérifier que notre solution approximée s'en approche bien.

**Exercice 10** (Résolution numérique).

1. Soit  $\Omega$  un domaine rectangulaire, choisissez une fonction  $u$  qui vérifie les conditions aux limites de (4.1). (on pourra prendre un produit de cosinus bien choisi)
2. Déduisez une fonction  $f$  telle que la fonction  $u$  de la question précédente soit solution de (4.1).
3. Résolvez numériquement (4.1) en utilisant le système linéaire (4.2).
4. Vérifiez graphiquement que la solution numérique  $u_h$  est une approximation correcte de  $u$  en la représentant graphiquement sur le maillage ainsi que la solution exacte  $u$ .

**Exercice 11** (Étude l'erreur).

1. Donnez une expression de la semi-norme  $H^1$  de l'erreur,  $|u - u_h|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L_2(\Omega)}$ , faisant intervenir la matrice de rigidité  $\mathbb{K}$ . Tracez  $\log h \mapsto \log(|u - u_h|_{H^1})$  pour différentes valeurs de  $h$ . Qu'observez vous ? Expliquez. (on pourra assimiler  $u$  à son interpolée)
2. Faites de même avec la norme  $L_2$  de l'erreur,  $\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)}$ . Que remarquez vous cette fois-ci ?