

Chapitre 1 (suite)

Formulations variationnelles des EDP elliptiques du second ordre

Proposition 5.1.

L'espace $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$ il existe une suite $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_n\|_{H^1(\Omega)} = 0$.

Ce résultat nous dit que $H^1(\Omega)$ n'est autre que le plus petit espace complet (au sens de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$) contenant $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Revenons maintenant à la formulation (4). On voit que si $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est solution de ce problème, alors on a

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) & \text{et} \\ a(u, \varphi) = \ell(\varphi) & \forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

Vérifions que $a(\cdot, \cdot)$ est continu dans $H^1(\Omega)$. En appliquant des inégalités de Cauchy-Schwarz on a :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} + u \bar{v} \, d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla u\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

d'où la continuité de $a(\cdot, \cdot)$ en tant que forme sesquilinéaire sur $H^1(\Omega)$. De même on a $|\ell(v)| \leq \left| \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$ d'où la continuité de $\ell(\cdot)$ en tant que forme anti-linéaire sur $H^1(\Omega)$.

A présent choisissons un $v \in H^1(\Omega)$ arbitraire. D'après la proposition précédente, il existe une suite $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - \varphi_n\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Alors on a $a(u, \varphi_n) = \ell(\varphi_n)$ pour tout $n \geq 1$ et par continuité on peut passer à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans égalité. On obtient

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) & \text{et} \\ a(u, v) = \ell(v) & \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (7)$$

On a donc démontré que si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et u vérifie (3), alors u vérifie (7). Vérifions maintenant que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées par la formulation (7).

- $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert,
- $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ est $\ell : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ sont continues,
- $a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^2 \, d\mathbf{x} = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$ donc $a(\cdot, \cdot)$ est coercive.

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram, et d'après celui-ci la formulation (7) admet une unique solution.

6 Conditions aux limites non-homogènes

On s'intéresse à présent à un nouveau problème. Étant donné $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ on veut résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8)$$

Proposition 6.1.

Soit $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Alors u vérifie (8) si et seulement si elle vérifie:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) & \text{et} \\ a(u, v) = \ell(v) & \forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{avec } a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} + u \bar{v} \, d\mathbf{x}$$

$$\ell(v) := \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g \bar{v} \, d\sigma$$

Démo:

La partie \Rightarrow de ce résultat se prouve simplement en partant d'une solution de (8), en multipliant l'EDP par une fonction test, et en appliquant la formule de Green. Démontrons l'implication inverse. Supposons que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ satisfait (7). D'après la formule de Green on a

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (g - \partial_{\mathbf{n}} u) v \, d\sigma \quad \forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}).$$

Posons $\varphi = -\Delta u + u - f$. Il existe $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$ car $\varphi \in L^2(\Omega)$. On a donc

$$0 = \int_{\Omega} \varphi \bar{\varphi}_n \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall n \geq 0$$

car $\varphi_n = 0$ sur $\partial\Omega$. En passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$ on obtient $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ c'est-à-dire $-\Delta u + u = f$ dans Ω . A présent soit $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ tel que $v|_{\partial\Omega} = \bar{g} - \partial_{\mathbf{n}} \bar{u}$. Une telle fonction existe car $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ donc $\partial_{\mathbf{n}} u \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$. On a donc:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (g - \partial_{\mathbf{n}} u) v \, d\sigma \\ &\Rightarrow 0 = \|g - \partial_{\mathbf{n}} u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \Rightarrow \partial_{\mathbf{n}} u = g \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

□

On est donc amené à considérer la formulation variationnelle,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \\ a(u, v) = \ell(v) \quad v \in V \end{cases} \quad (10)$$

Au vu de ce qui précède, on pourrait penser naturellement à choisir $V = H^1(\Omega)$. Mais pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram on doit avoir la continuité de

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g \bar{v} d\sigma$$

et il n'est pas clair que le 2eme terme soit continu. Pour étudier ce point, nous allons donner un sens à " $v|_{\partial\Omega}$ " lorsque $v \in H^1(\Omega)$.

Theorem 6.1 (Continuité de la trace, admise).

Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ une partie du bord de mesure non-nulle au sens de $d\sigma$ (la mesure de surface). Alors il existe une application unique $\gamma_{\Gamma} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ qui est continue au sens de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Cette application est caractérisée par

$$\gamma_{\Gamma}(\varphi) = \varphi|_{\Gamma} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}).$$

□

Ce théorème nous dit qu'il existe un $C > 0$ tel que $\|\gamma_{\Gamma}(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}$. Dans le problème que nous considérons on a définition " $\int_{\partial\Omega} g v d\sigma$ " = $\int_{\partial\Omega} g \gamma_{\Gamma}(v) d\sigma$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Par ailleurs $|\int_{\partial\Omega} g v d\sigma| \leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_{\partial\Omega}(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Donc

$$\begin{aligned} |\ell(v)| &\leq \left| \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\partial\Omega} g v d\sigma \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Donc l'application $\ell : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ a bien un sens et est continue. On sait par ailleurs que $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et coercive, et que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. D'après le théorème de Lax-Milgram, la formulation

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega) \\ a(u, v) &= \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{11}$$

admet une unique solution.

7 Condition de Dirichlet homogène

Pour le problème suivant on suppose à nouveau donnés $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$. Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ une partie du bord de mesure (de surface) non-nulle. On veut résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} u = g & \text{sur } \Sigma := \partial\Omega \setminus \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{12}$$

Supposons que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ est solution de (12). Alors choisissons un $v \in \mathcal{C}_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ où l'on définit l'espace

$$\mathcal{C}_{0,\Gamma}^1(\Omega) := \{\varphi|_{\Omega}, \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d), \varphi|_{\Gamma} = 0\}.$$

La formule de Green nous donne alors:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} v \partial_{\mathbf{n}} u d\sigma \\ \iff \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} - \underbrace{\int_{\Gamma} v \partial_{\mathbf{n}} u d\sigma}_{=0 \text{ car } v=0 \text{ sur } \Gamma} &= \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} g v d\sigma \end{aligned}$$

La solution u doit donc vérifier la formulation variationnelle

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}_{0,\Gamma}^1(\Omega) & \text{et} \\ a(u, v) = \ell(v) & \forall v \in \mathcal{C}_{0,\Gamma}^1(\Omega) \end{cases} \quad (13)$$

avec $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}$
 $\ell(v) := \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} g v d\sigma$

Attention cette formulation vaut pour $v \in \mathcal{C}_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ mais pas pour $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$! La condition $v = 0$ sur Γ est importante. Par ailleurs on impose $u \in \mathcal{C}_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ afin de prendre en compte la condition de Dirichlet " $u = 0$ sur Γ ".

Ceci étant dit, (13) se prête pas à une application du théorème de Lax-Milgram, car $\mathcal{C}_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ n'est pas un espace de Hilbert. Il faut plonger cet espace dans un Hilbert qui "lui ressemble" et qui permette en particulier de prendre en compte la condition de Dirichlet. On introduit donc

$$H_{0,\Gamma}^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_{\Gamma}(v) = 0\}.$$

On a donc $H_{0,\Gamma}^1(\Omega) = \ker(\gamma_{\Gamma})$. Comme l'application trace est continue (c'est le théorème de trace), son noyau est fermé. L'espace $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ est donc un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ qui est un Hilbert. Ainsi $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ est lui-même un espace de Hilbert. Au final on est amené à considérer la formulation variationnelle

$$\begin{cases} u \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega) & \text{et} \\ a(u, v) = \ell(v) & \forall v \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega). \end{cases} \quad (14)$$

Vérifions les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

- Nous venons de montrer que $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
- Vérifions la continuité de ℓ . En appliquant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis la continuité de l'application trace, on obtient

$$\begin{aligned} |\ell(v)| &\leq \left| \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Sigma} g v d\sigma \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)} \|\gamma_{\Sigma}(v)\|_{L^2(\Sigma)} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Sigma)}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

- La continuité de $a(\cdot, \cdot)$ se démontre de même, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

Il reste une hypothèse à vérifier: la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$. Cette hypothèse est plus difficile à vérifier. En effet la forme sesquilinéaire $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\mathbf{x}$ n'est clairement pas coercive sur $H^1(\Omega)$ puisque si l'on prend $u = v = 1 \in H^1(\Omega)$ alors $a(v, v) = 0$. Mais ceci ne compromet pas la coercivité dans notre cas, car nous nous plaçons dans $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$, et la condition de Dirichlet sur Γ va jouer un rôle. On utilisera l'inégalité de Poincaré que nous admettrons.

Theorem 7.1. (*Inégalité de Poincaré, admise*)

Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ une partie du bord de mesure de surface non-nulle. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \int_{\Gamma} v \, d\sigma \right|^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

A noter que la constante $C > 0$ dans l'inégalité ci-dessus dépend de Γ , mais est indépendante de v . Cette inégalité implique en particulier $C\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2$ pour tout $v \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$. Ceci démontre la coercivité du $a(\cdot, \cdot)$ considéré dans ce paragraphe.

On peut donc finalement conclure que toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, de sorte que la formulation (14) admet une unique solution.