

9 Prise en compte des conditions de Dirichlet

Les conditions aux limites de Neumann ne requièrent aucun traitement particulier. A contrario, les conditions au bord de Dirichlet réclament, elles, un traitement spécifique. Pour fixer les idées considérons une portion du bord du domaine $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de surface non nulle. Supposons que l'on souhaite résoudre le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (14)$$

Une formulation variationnelle possible s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega). \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{avec } a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_{\Omega} f \bar{v} d\mathbf{x}.$$

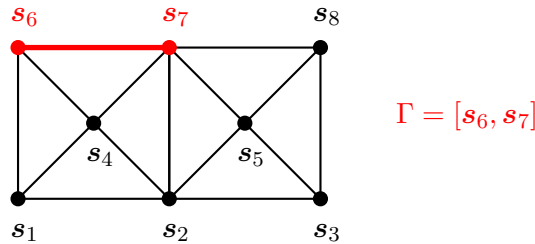
Supposons que le maillage ait été généré de sorte que la partie du bord Γ associée à la condition de Dirichlet soit exactement formé d'une réunion d'arêtes du maillage $\Gamma = \cup_{j=1}^{N_g} \bar{\gamma}_j$ comme en (11). Soit par ailleurs $\mathcal{S}_h(\Gamma) := \{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h \mid \mathbf{s} \in \Gamma\}$ l'ensemble des sommets du maillage localisés sur Γ . L'espace variationnel discret "naturellement" associé à (15) est alors

$$\begin{aligned} V_h^\Gamma &:= V_h \cap H_{0,\Gamma}^1(\Omega) \\ &= \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), v|_\tau \in \mathbb{P}_1(\tau) \forall \tau \in \mathcal{T}_h \text{ et } v|_\Gamma = 0\} \\ &= \text{span}\{\varphi_{\mathbf{s}} \mid \mathbf{s} \in \mathcal{S}_h \setminus \mathcal{S}_h(\Gamma)\} \end{aligned}$$

Une première formulation variationnelle discrète possible pour (15) peut être obtenue en remplaçant $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ par V_h^Γ ,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h^\Gamma \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^\Gamma. \end{cases} \quad (16)$$

On peut mettre (16) sous la forme d'un système linéaire en utilisant la numérotation des noeuds. Il faudra prendre garde ici à exclure de la numérotation du maillage tous les noeuds localisés sur Γ . Ceci pose une difficulté d'ordre algorithmique car, en général, les noeuds de $\mathcal{S}_h \setminus \mathcal{S}_h(\Gamma)$ ne sont pas numérotés de 1 à $\text{card}(\mathcal{S}_h \setminus \mathcal{S}_h(\Gamma))$. Pour bien faire comprendre ce problème revenons par exemple au maillage considéré à la fin de la section 3.



Nous avons fait figurer en rouge ci-dessus la portion du bord que nous considérons pour le bord Dirichlet noté Γ . Les numéros des noeuds associés à $\mathcal{S}_h \setminus \mathcal{S}_h(\Gamma)$ sont $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{8\}$. Il ne s'agit pas d'entier consécutifs et, en particulier, $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{8\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Introduisons les deux ensembles d'indice correspondant à la frontière Γ et à son complémentaire

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_\Gamma &:= \{j \in \{1 \dots N_s\} \mid \mathbf{s}_j \in \Gamma\} \\ \mathfrak{I}_\Gamma^0 &:= \{1 \dots N_s\} \setminus \mathfrak{I}_\Gamma.\end{aligned}$$

Au lieu de (16) on va se ramener à une formulation discrète écrite dans V_h . Pour $u_h, v_h \in V_h$ se décomposant sur la base des fonctions de formes comme $u_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_s} u_k \varphi_k(\mathbf{x})$ et $v_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_s} v_j \varphi_j(\mathbf{x})$, on définit

$$\begin{aligned}\dot{a}(u_h, v_h) &:= a(\sum_{k \in \mathfrak{I}_\Gamma^0} u_k \varphi_k, \sum_{j \in \mathfrak{I}_\Gamma^0} v_j \varphi_j) + \sum_{j \in \mathfrak{I}_\Gamma} u_j \bar{v}_j \\ \dot{\ell}(v_h) &:= \ell(\sum_{j \in \mathfrak{I}_\Gamma^0} v_j \varphi_j).\end{aligned}$$

La nouvelle formulation s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \dot{a}(u_h, v_h) = \dot{\ell}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (17)$$

C'est un exercice simple de démontrer que $u_h \in V_h$ est solution de (17) si et seulement si $u_h \in V_h^\Gamma$ est solution de (16). L'avantage de considérer (17) est que l'on s'est ramené à une situation pour laquelle la numérotation du problème sans condition de Dirichlet est préservée. La matrice associée à (17) s'écrit

$$\dot{A} = \sum_{j \in \mathfrak{I}_\Gamma^0} \sum_{k \in \mathfrak{I}_\Gamma^0} a(\varphi_k, \varphi_j) \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k^\top + \sum_{j \in \mathfrak{I}_\Gamma} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\top$$

Pour l'écriture de l'algorithme d'assemblage correspondant, on suppose disponible un tableau qui permet de déterminer (en $\mathcal{O}(1)$ opérations) si, pour un $j \in \{1 \dots N_s\}$ donné, on a $j \in \mathfrak{I}_\Gamma$ ou pas. Ceci revient à pouvoir déterminer rapidement si un noeud appartient à Γ ou non. Si un tel tableau n'est pas disponible, il convient de mettre en place une étape préliminaire permettant de le construire.

Algorithme d'assemblage avec condition de Dirichlet

```

A = 0
for q = 1 ... Nt
  for l = 1 ... 3
    for m = 1 ... 3
      if (Iq,l ∈ ℑΓ) { ĀIq,l,Iq,l = 1 }
      if (Iq,m ∈ ℑΓ) { ĀIq,m,Iq,m = 1 }
      if (Iq,m ∉ ℑΓ and Iq,l ∉ ℑΓ) {
        ĀIq,l,Iq,m = ĀIq,l,Iq,m + aτq(ϕIq,m, ϕIq,l) }
      endfor
    endfor
  endfor
endfor

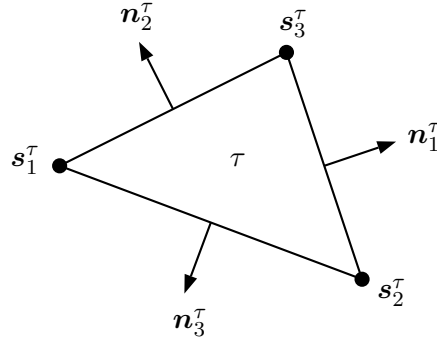
```

(18)

10 Calcul des interactions élémentaires

Avec les boucles d'assemblage, nous avons vu comment l'assemblage de la matrice (et du second membre) du problème se ramenait au calcul de termes de la forme $a_\tau(\varphi_k, \varphi_j)$ localisés sur un seul triangle τ . Nous allons voir maintenant comment calculer ces termes. Dans ce qui suit nous exploitons explicitement le fait que l'on considère une discrétisation \mathbb{P}_1 -Lagrange (et pas par exemple \mathbb{P}_k -Lagrange avec $k \geq 2$).

Dans ce paragraphe on considère un triangle du maillage $\tau \in \mathcal{T}_h$ dont on notera $\mathbf{s}_1^\tau, \mathbf{s}_2^\tau, \mathbf{s}_3^\tau$ les sommets. Pour $\tau = \tau_q$, on a donc $\mathbf{s}_k^\tau = \mathbf{s}_{I_{q,k}}^\tau, k = 1, 2, 3$. On supposera que l'ordre dans lequel sont donnés ces sommets oriente le triangle τ dans le sens trigonométrique (les calculs seraient tout à fait semblables dans le cas contraire).



10.1 Fonctions de forme locales

Pour rendre les notations plus concises on adoptera la convention de notation suivante: pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on pose que $\mathbf{s}_k^\tau := \mathbf{s}_j^\tau$ dès lors que $k - j = 3 * q$ pour un certain entier $q \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\mathbf{s}_0^\tau = \mathbf{s}_3^\tau = \mathbf{s}_6^\tau, \mathbf{s}_1^\tau = \mathbf{s}_4^\tau$, et $\mathbf{s}_{-1}^\tau = \mathbf{s}_2^\tau = \mathbf{s}_5^\tau$. On introduit en plus des vecteurs $\mathbf{n}_j^\tau, j = 1, 2, 3$ normaux aux arêtes $[\mathbf{s}_{j+1}^\tau, \mathbf{s}_{j+2}^\tau]$ dirigés vers l'extérieur de τ , définis par

$$\mathbf{n}_j^\tau = (\mathbf{s}_{j+2}^\tau - \mathbf{s}_{j+1}^\tau) \times \mathbf{e}_3 \quad (19)$$

où l'on rappelle que $\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ désigne le 3ème vecteur de la base canonique i.e. $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, et " \times " désigne ici le produit vectoriel usuel. Attention, les vecteurs \mathbf{n}_j^τ ne sont pas unitaires. Enfin on notera $\varphi_j^\tau, j = 1, 2, 3$ l'unique fonction affine $\varphi_j^\tau \in \mathbb{P}_1(\tau)$ telle que

$$\varphi_j^\tau(\mathbf{s}_k^\tau) = 0 \quad \text{pour } j \neq k \quad \text{et} \quad \varphi_j^\tau(\mathbf{s}_j^\tau) = 1.$$

Une telle fonction existe et est unique d'après le lemme 2.1. Nous appellerons les φ_j^τ fonctions de forme locale à τ . Cette terminologie est motivée par le fait qu'il existe trois fonctions de forme "globales" φ_j qui coïncident sur τ avec les φ_j^τ . On a en effet par construction $\varphi_j^\tau = \varphi_{\mathbf{s}_j^\tau}$ ou encore $\varphi_j^{\tau_q} = \varphi_{I_{q,j}}$. Les fonction φ_j^τ admettent l'expression suivante qui est explicite en fonction des \mathbf{s}_j^τ ,

$$\varphi_j^\tau(\mathbf{x}) = 1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{s}_j^\tau) \cdot \mathbf{n}_j^\tau}{(\mathbf{s}_{j+1}^\tau - \mathbf{s}_j^\tau) \cdot \mathbf{n}_j^\tau} \quad (20)$$

Cette expression conduit également à une formule très simple pour le gradient des fonctions de forme locales. En effet le gradient de (20) donne $\nabla\varphi_j^\tau = -\mathbf{n}_j^\tau/(\mathbf{s}_{j+1}^\tau - \mathbf{s}_j^\tau) \cdot \mathbf{n}_j^\tau$. On peut simplifier cette expression, car d'après (19) on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_{j+1}^\tau - \mathbf{s}_j^\tau) \cdot \mathbf{n}_j^\tau &= (\mathbf{s}_{j+1}^\tau - \mathbf{s}_j^\tau) \cdot [(\mathbf{s}_{j+2}^\tau - \mathbf{s}_{j+1}^\tau) \times \mathbf{e}_3] \\ &= \mathbf{e}_3 \cdot [(\mathbf{s}_{j+1}^\tau - \mathbf{s}_j^\tau) \times (\mathbf{s}_{j+2}^\tau - \mathbf{s}_{j+1}^\tau)] \\ &= 2|\tau|. \end{aligned}$$

Ceci conduit à

$$\nabla\varphi_j^\tau = -\frac{\mathbf{n}_j^\tau}{2|\tau|}. \quad (21)$$

Exemple Considérons le cas où τ est le triangle de sommets $\mathbf{s}_1^\tau = (0,0)$, $\mathbf{s}_2^\tau = (1,0)$ et $\mathbf{s}_3^\tau = (0,1)$. Dans toute la suite on notera $\hat{\tau}$ ce triangle que l'on nomme parfois triangle de référence. On a dans ce cas $|\tau| = 1/2$ et

$$\begin{aligned} \varphi_1^\tau(\mathbf{x}) &= 1 - x_1 - x_2, & \nabla\varphi_1^\tau &= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \varphi_2^\tau(\mathbf{x}) &= x_1, & \nabla\varphi_2^\tau &= \mathbf{e}_1, \\ \varphi_3^\tau(\mathbf{x}) &= x_2, & \nabla\varphi_3^\tau &= \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

10.2 Rigidité élémentaire

Voyons tout d'abord comment calculer les termes de la forme $\int_\tau \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k d\mathbf{x}$. Observons simplement que d'après (21), chaque $\nabla\varphi_j^\tau \in \mathbb{R}^2$ est une constante vectorielle. On peut ainsi directement écrire

$$\begin{aligned} \int_\tau \nabla\varphi_j^\tau \cdot \nabla\varphi_k^\tau d\mathbf{x} &= \nabla\varphi_j^\tau \cdot \nabla\varphi_k^\tau \int_\tau d\mathbf{x} = \frac{\mathbf{n}_j^\tau \cdot \mathbf{n}_k^\tau}{4|\tau|} \\ &= \frac{(\mathbf{s}_{j+2}^\tau - \mathbf{s}_{j+1}^\tau) \cdot (\mathbf{s}_{k+2}^\tau - \mathbf{s}_{k+1}^\tau)}{4|\tau|}. \end{aligned}$$

Cette expression a la vertu d'être complètement explicite vis-à-vis des coordonnées des sommets du triangle.

Exemple Dans le cas où $\tau = \hat{\tau}$ est le triangle de référence i.e. $\mathbf{s}_1^\tau = (0,0)$, $\mathbf{s}_2^\tau = (1,0)$ et $\mathbf{s}_3^\tau = (0,1)$, la matrice de rigidité élémentaire $\mathbf{K}^\tau = (\mathbf{K}_{j,k}^\tau)_{j,k=1,2,3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie par $\mathbf{K}_{j,k}^\tau = \int_\tau \nabla\varphi_j^\tau \cdot \nabla\varphi_k^\tau d\mathbf{x}$ admet l'expression explicite suivante

$$\mathbf{K}^\tau = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10.3 Masse élémentaire

Pour le calcul des termes de la forme $\int_\tau \varphi_j(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, on peut utiliser une autre formule explicite générale.

Lemma 10.1 (admis).

Quel que soit le triangle $\tau \subset \mathbb{R}^2$, étant donnés trois entiers $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_{\tau} \varphi_1^{\tau}(\mathbf{x})^{\alpha_1} \varphi_2^{\tau}(\mathbf{x})^{\alpha_2} \varphi_3^{\tau}(\mathbf{x})^{\alpha_3} d\mathbf{x} = 2|\tau| \frac{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!}{(2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)!}$$

Comme application directe on voit que, quel que soit le triangle $\tau \subset \mathbb{R}^2$, la matrice de masse élémentaire $M^{\tau} = (M_{j,k}^{\tau})_{j,k=1,2,3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie par $M_{j,k}^{\tau} = \int_{\tau} \varphi_j^{\tau} \varphi_k^{\tau} d\mathbf{x}$ dépend uniquement de $|\tau|$ et est donnée par

$$M^{\tau} = \frac{|\tau|}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.4 Quadrature sur un triangle dans le cas général

On peut avoir à calculer des intégrales plus compliquées que les intégrales élémentaires considérées dans les paragraphes précédents. Étant donné un triangle τ , on se pose alors la question du calcul de l'intégrale $\int_{\tau} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = ?$ sans rien savoir sur la fonction $g(\mathbf{x})$ a priori, si ce n'est qu'il s'agit d'une fonction régulière.

Pour réaliser un tel calcul, on a recours à une règle de quadrature qui permet de calculer l'intégrale non pas exactement, mais de manière approchée. Une règle de quadrature prend la forme

$$\int_{\tau} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq \sum_{q=1}^Q g(\mathbf{x}_q) \omega_q.$$

où les $\mathbf{x}_q \in \mathbb{R}^2$ (resp. $\omega_q \in \mathbb{R}$) sont les points (resp. poids) de la règle de quadrature qui dépendent du domaine d'intégration i.e. le triangle τ . Voici trois exemples de règles de quadrature dans un triangle

$$\int_{\tau} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq g\left(\frac{\mathbf{s}_1^{\tau} + \mathbf{s}_2^{\tau} + \mathbf{s}_3^{\tau}}{3}\right) |\tau| \quad (22a)$$

$$\int_{\tau} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq \left(g\left(\frac{\mathbf{s}_1^{\tau} + \mathbf{s}_2^{\tau}}{2}\right) + g\left(\frac{\mathbf{s}_2^{\tau} + \mathbf{s}_3^{\tau}}{2}\right) + g\left(\frac{\mathbf{s}_3^{\tau} + \mathbf{s}_1^{\tau}}{2}\right) \right) \frac{|\tau|}{3} \quad (22b)$$

$$\int_{\tau} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq \left(27 g\left(\frac{\mathbf{s}_1^{\tau} + \mathbf{s}_2^{\tau} + \mathbf{s}_3^{\tau}}{3}\right) + \sum_{j=1,2,3} 3 g(\mathbf{s}_j^{\tau}) + 8 g\left(\frac{\mathbf{s}_{j+1}^{\tau} + \mathbf{s}_{j+2}^{\tau}}{2}\right) \right) \frac{|\tau|}{60} \quad (22c)$$

En utilisant une règle de quadrature on commet une erreur, mais cette erreur est d'autant plus petite que la triangulation est fine. Dans le cas d'une méthode d'éléments finis \mathbb{P}_k -Lagrange, l'erreur de quadrature ne dégrade pas la consistance de la méthode dès lors que les règles de quadrature sont exactes pour les éléments de $\mathbb{P}_{2k-2}(\mathbb{R}^2)$ (dans le cas d'une méthode \mathbb{P}_1 -Lagrange il faut donc que la règle soit exacte pour les constantes).

10.5 Quadrature sur une arête

De même, on est amené à calculer des intégrales sur des arêtes, lors de la prise en compte de termes de bord par exemple. Considérant une arête du maillage notée γ , on doit donc calculer des intégrales de la forme $\int_{\gamma} g(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x})$.

Étant donné un segment du maillage γ , notons $\mathbf{s}_1^\gamma, \mathbf{s}_2^\gamma \in \mathcal{S}_h$ ses deux extrémités, et $|\gamma|$ sa longueur. On peut considérer les règles suivantes

$$\int_{\gamma} g(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \simeq g\left(\frac{\mathbf{s}_1^\gamma + \mathbf{s}_2^\gamma}{2}\right) \quad (23a)$$

$$\int_{\gamma} g(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \simeq \left(g(\mathbf{s}_1^\gamma)|\gamma| + 4g\left(\frac{\mathbf{s}_1^\gamma + \mathbf{s}_2^\gamma}{2}\right) + g(\mathbf{s}_2^\gamma)\right) \frac{|\gamma|}{6}. \quad (23b)$$

11 Validation d'un code élément finis

Dans le cas d'une méthode éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange, il existe certains tests très simples qu'il est possible d'utiliser pour tenter de débusquer un bug. Si le code passe les tests suivants, cela ne signifiera nullement l'absence de bug. En revanche, si l'échec de l'un des tests impliquera la présence d'un bug à coup sur.

11.1 Test sur la rigidité

Commençons par observer que, si $u \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$, alors on a exactement $u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_s} u(\mathbf{s}_j) \varphi_j(\mathbf{x})$. Prenons deux fonctions $u, v \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ définies par $u(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}_u \cdot \mathbf{x} + \beta_u$ et $v(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}_v \cdot \mathbf{x} + \beta_v$. Notons par ailleurs $\mathbf{U} := (u(\mathbf{s}_j))_{j=1 \dots N_s}$ et $\mathbf{V} := (v(\mathbf{s}_j))_{j=1 \dots N_s}$, ainsi que la matrice de rigidité $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_{j,k})_{j,k=1 \dots N_s}$ avec $\mathbf{K}_{j,k} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_k d\mathbf{x}$. Alors on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_u \cdot \boldsymbol{\alpha}_v |\Omega| &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{k=1}^{N_s} u(\mathbf{s}_k) \varphi_k \right) \cdot \nabla \left(\sum_{j=1}^{N_s} v(\mathbf{s}_j) \varphi_j \right) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} v(\mathbf{s}_j) u(\mathbf{s}_k) \int_{\Omega} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j d\mathbf{x} \\ &= \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \mathbf{K}_{j,k} v(\mathbf{s}_j) u(\mathbf{s}_k) = \mathbf{V}^\top \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \end{aligned}$$

Par exemple, si l'on prend $\boldsymbol{\alpha}_u = \mathbf{e}_1$ et $\boldsymbol{\alpha}_v = \mathbf{e}_2$ et β_u, β_v quelconque, on doit avoir $\mathbf{V}^\top \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = 0$. Si par contre $\boldsymbol{\alpha}_u = \boldsymbol{\alpha}_v = \mathbf{e}_1$ alors $\mathbf{V}^\top \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = |\Omega|$. Enfin, avec le même type de calcul, on voit que

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{si } \mathbf{U}^\top = (1, \dots, 1).$$

11.2 Test sur la masse

Notons $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_{j,k})_{j,k=1 \dots N_s}$ la matrice de masse définie par $\mathbf{M}_{j,k} := \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_k d\mathbf{x}$. Alors, avec un calcul semblable à celui que nous avons mené ci-dessus pour la rigidité, on a

$$\mathbf{U}^\top \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U} = |\Omega| \quad \text{pour } \mathbf{U}^\top = (1, \dots, 1).$$