

Chapitre 2

Aspects algorithmiques de la méthode des éléments finis

1 La méthode de Galerkin

Étant donné un espace de Hilbert V muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée $\|\cdot\|_V$, supposons que l'on souhaite calculer de manière effective la solution de la formulation variationnelle:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (1)$$

où $a(\cdot, \cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont des formes sesquilinéaires et antilinéaires continues, et où $a(\cdot, \cdot)$ est coercive:

$$\Re\{a(v, v)\} \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

L'espace V est a priori de dimension infinie ce qui pose problème pour une résolution effective. Pour cette raison, il est en général impossible de calculer u exactement. En revanche on peut espérer pouvoir calculer un $u_h \in V$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0$$

où $h > 0$ est un paramètre qui est d'autant plus petit que l'effort de calcul est grand. Bien souvent (mais pas toujours) h représente la finesse d'un maillage du domaine de calcul. En pratique h n'est jamais nul, mais on veut pouvoir approcher u d'aussi près que l'on souhaite à condition "d'inverser" le calcul nécessaire.

Voici une méthode générique, dite méthode de Galerkin, permettant de calculer un tel u_h . On commence par choisir une famille d'espaces $(V_h)_{h>0}$ vérifiant trois conditions:

- 1) V_h est de dimension finie
- 2) $V_h \subset V$
- 3) $\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v_h - v\|_V = 0$ pour tout $v \in V$

Les espaces V_h sont parfois désignés comme espaces variationnels discrets. La méthode de Galerkin consiste alors à résoudre la même formulation que (1) mais en substituant V_h à V ce qui nous amène à écrire une formulation dite discrète:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2)$$

Comme $V_h \subset V$ est de dimension finie, il s'agit d'un espace complet, c'est donc un espace de Hilbert, et comme $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, on peut encore appliquer Lax-Milgram à (2). De sorte que (2) admet une unique solution que l'on note u_h . **Attention:**

$$\begin{array}{ccc} u_h & \neq & u \\ \text{solution de (2)} & \neq & \text{solution de (1)} \end{array}$$

Il ne faut pas confondre la solution exacte du problème (que l'on ne connaîtra bien souvent jamais) avec la solution discrète que l'on calcule en pratique. La formulation (2) peut se mettre sous la forme d'un système linéaire. En effet soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ une base de V_h de sorte que, par linéarité, (2) est équivalente à:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, \varphi_j) = \ell(\varphi_j) \quad \forall j = 1 \dots N \end{cases} \quad (3)$$

Par ailleurs comme $u_h \in V_h$, elle se décompose sur la base des φ_j comme $u_h = \sum_{k=1}^N u_k \varphi_k$ avec $u_k \in \mathbb{C}$. En injectant cette décomposition dans (3) on en déduit: $\sum_{k=1}^N a(\varphi_k, \varphi_j) u_k = \ell(\varphi_j)$ pour tout $j = 1 \dots N$. Ce qui se re-écrit sous forme matricielle comme:

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{C}^N \text{ tel que} \\ A \cdot U = F \end{cases} \quad (4)$$

avec

$$A = (A_{j,k})_{j,k=1 \dots N} \quad A_{j,k} := a(\varphi_k, \varphi_j)$$

$$F = \begin{bmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_N) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}.$$

La consistance de la méthode de Galerkin est assurée par le lemme suivant connue sous le nom de lemme de C  a.

Lemma 1.1 (lemme de C  a).

Si $u \in V$ est l'unique solution de (1) et $u_h \in V_h$ l'unique solution de (2), alors il existe $C > 0$ indépendant de $h > 0$ tel que

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Démo:

Soit $v_h \in V_h \subset V$ arbitraire. D'après (1) et (2), pour tout $v_h \in V_h$, on a:

$$\begin{aligned} a(u, v_h) &= \ell(v_h) \quad \text{car } v_h \in V \\ a(u_h, v_h) &= \ell(v_h) \quad \text{car } v_h \in V_h \\ \Rightarrow a(u - u_h, v_h) &= 0 \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

En choisissant $w_h \in V_h$ arbitraire, et en appliquant l'identité ci-dessus à $v_h = w_h - u_h \in V_h$, on obtient $a(u - u_h, w_h - u_h) = 0$. Maintenant d'après la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$, pour tout $w_h \in V_h$ on a:

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq \Re\{a(u - u_h, u - u_h)\} \\ &\leq \Re\{a(u - u_h, u - w_h)\} + \Re\{a(u - u_h, w_h - u_h)\} \\ &\leq |a(u - u_h, u - w_h)| \leq \|a\| \|u - u_h\|_V \|u - w_h\|_V \end{aligned}$$

où $\|a\| > 0$ renvoie au module de continuité de $a(\cdot, \cdot)$. En divisant de part et d'autre de l'inégalité par $\|u - u_h\|_V$ obtient finalement $\|u - u_h\|_V \leq (C/\alpha)\|u - w_h\|_V$. Comme $w_h \in V_h$ était choisi arbitrairement, il suffit de prendre la borne inf pour établir le résultat recherché. \square

Les méthodes d'éléments finis sont des méthodes de résolution de Galerkin correspondant à un choix particulier d'espace discret. Dans ce chapitre, nous allons décrire cette méthode pour la résolution de problèmes en 2D. Mais les principes se généralisent facilement en 1D et 3D.

Pour fixer les idées, nous considérerons le premier problème du chapitre précédent. Avec un ouvert régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

Ce problème admet pour formulation variationnelle

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (6)$$

2 Espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange

Pour pouvoir écrire une formulation discrète, on veut considérer un espace discret $V_h \subset H^1(\Omega)$ pertinent. Nous décrivons ici l'espace associé aux éléments finis \mathbb{P}_1 -Lagrange. Cet espace est défini à partir d'un maillage régulier.

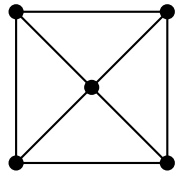
Definition 2.1.

Une triangulation régulière de Ω est une collection \mathcal{T} de triangles satisfaisant les trois propriétés suivantes:

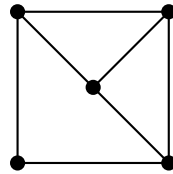
- i) $\overline{\Omega} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} \overline{\tau}$,
- ii) tout triangle $\tau \in \mathcal{T}$ est d'intérieur non vide,
- iii) toute arête d'un triangle $\tau \in \mathcal{T}$ est soit une arête complète d'un autre triangle $\tau' \in \mathcal{T}$, soit une partie de $\partial\Omega$.

Il arrive souvent qu'une triangulation soit notée \mathcal{T}_h où h représente ici le diamètre maximale des triangles qui la compose, de sorte que lorsque $h \rightarrow 0$, la finesse de la triangulation augmente.

Remarque dans le cas où Ω est un carré:



maillage régulier



maillage pas régulier

Étant donné un domaine $\omega \subset \mathbb{R}^2$ on notera $\mathbb{P}_1(\omega) = \{v|_\omega \text{ tel que } v(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} + \beta, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^2, \beta \in \mathbb{C}\}$. Étant donné une triangulation régulière \mathcal{T}_h d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, l'espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange est donné par

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), v|_\tau \in \mathbb{P}_1(\tau) \forall \tau \in \mathcal{T}_h\}.$$

Attention! Cette définition nous dit que, si $v_h \in V_h$ alors pour chaque $\tau \in \mathcal{T}_h$ il existe $\boldsymbol{\alpha}_\tau \in \mathbb{C}^2, \beta_\tau \in \mathbb{C}$ tels que $v(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}_\tau \cdot \mathbf{x} + \beta_\tau$ pour tout $\mathbf{x} \in \tau$. Il est important de noter que les coefficients $\boldsymbol{\alpha}_\tau, \beta_\tau$ dépendent de τ . Ainsi on a, a priori, $\boldsymbol{\alpha}_\tau \neq \boldsymbol{\alpha}_{\tau'}$ et $\beta_\tau \neq \beta_{\tau'}$ si $\tau \neq \tau'$. La fonction v_h est affine seulement par morceaux. Elle n'est pas affine globalement.

Lemma 2.1.

Soient $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathbb{R}^2$ trois points non-alignés. Pour tout jeu de valeurs $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$, il existe un unique $p \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $p(\mathbf{s}_j) = \mu_j, j = 0, 1, 2$.

Démo:

L'application $\phi : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{C}^3$ définie par $\phi(p) = (p(\mathbf{s}_0), p(\mathbf{s}_1), p(\mathbf{s}_2))$ est une application linéaire. Comme $\dim \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2) = 3$, il suffit de montrer qu'elle est injective pour prouver que c'est un isomorphisme.

Soit donc $p \in \ker(\phi)$, c'est-à-dire tel que $p(\mathbf{s}_0) = p(\mathbf{s}_1) = p(\mathbf{s}_2) = 0$. On a $p(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} + \beta$ pour certains $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^2$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Comme les sommets sont supposés non-alignés, les deux vecteurs $\mathbf{a}_1 := \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0$ et $\mathbf{a}_2 := \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_0$ constituent une base de \mathbb{C}^2 . Donc il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$. On a alors $|\boldsymbol{\alpha}|^2 = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) = \lambda_1(p(\mathbf{s}_1) - p(\mathbf{s}_0)) + \lambda_2(p(\mathbf{s}_2) - p(\mathbf{s}_0)) = 0$. D'où $\boldsymbol{\alpha} = 0$. On en déduit également $0 = p(\mathbf{s}_0) = \beta$. \square

Le lemme suivant montre que si deux éléments de V_h coïncident à tout les sommets de la triangulation (i.e. en un nombre fini de points), alors ces deux éléments coïncident partout.

Lemma 2.2.

Soit \mathcal{S}_h l'ensemble des sommets d'une triangulation régulière \mathcal{T}_h de Ω . Soit V_h l'espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange associé. Si $u \in V_h$ vérifie $u(\mathbf{s}) = 0$ pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$, alors $u = 0$ sur Ω tout entier.

Démo:

Soit $\tau \in \mathcal{T}_h$, il existe $p_\tau \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $u|_\tau = p_\tau|_\tau$. On en déduit que $p_\tau(\mathbf{s}) = 0$ pour tout sommet \mathbf{s} du triangle τ . Comme les trois sommets de τ ne sont pas alignés, car ce triangle n'est pas plat, le lemme précédent implique que $p_\tau = 0$ d'où $u|_\tau = 0$. Comme ceci vaut pour tout τ et que $\overline{\Omega} = \cup_{\tau \in \mathcal{T}_h} \overline{\tau}$, on en tire finalement $u = 0$ sur Ω tout entier. \square

Proposition 2.1.

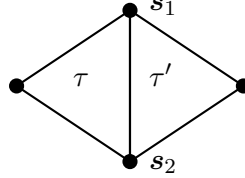
Avec les même notations qu'au lemme précédent, pour tout jeu de valeurs $(\mu_{\mathbf{s}})_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}, \mu_{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}$, il existe un unique élément $u_h \in V_h$ vérifiant $u_h(\mathbf{s}) = \mu_{\mathbf{s}} \forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$.

Démo:

L'unicité a été démontré avec le lemme précédent. Soit $\mu_{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}, \mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$ un jeu de valeurs. Pour chaque élément $\tau \in \mathcal{T}_h$, notons $\mathcal{S}(\tau)$ les sommets de τ . D'après le lemme 2.1, pour chaque $\tau \in \mathcal{T}_h$, il existe un unique $p_\tau \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $p_\tau(\mathbf{s}) = \mu_{\mathbf{s}}$ pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(\tau)$. Posons alors

$$u_h(\mathbf{x}) := \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} p_\tau(\mathbf{x}) 1_\tau(\mathbf{x}).$$

Vérifions que ceci définit bien un élément de V_h . Comme il s'agit clairement d'une fonction affine sur chaque élément de la triangulation, il suffit de vérifier qu'on a bien $u_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Pour démontrer ceci, il suffit de vérifier la continuité à la traversée de toute arête. Soit donc deux triangles adjacents $\tau, \tau' \in \mathcal{T}_h$, et soit $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathcal{S}_h$ les deux sommets qu'ils ont en commun.



Posons enfin $\sigma(t) = \mathbf{s}_1 + t(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)$, $t \in (0, 1)$. Il s'agit d'une paramétrisation de l'arête $[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2]$ qui joint \mathbf{s}_1 à \mathbf{s}_2 . Il existe $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{C}$ tels que $p_\tau(\sigma(t)) = \alpha t + \beta$ et $p_{\tau'}(\sigma(t)) = \alpha' t + \beta'$. De plus $p_\tau(\sigma(0)) = \mu_{\mathbf{s}_1} = p_{\tau'}(\sigma(0))$ et $p_\tau(\sigma(1)) = \mu_{\mathbf{s}_2} = p_{\tau'}(\sigma(1))$. Ainsi les deux fonctions $p_\tau(\sigma(t))$ et $p_{\tau'}(\sigma(t))$ sont affines sur \mathbb{R} et coïncident en deux points, de sorte qu'elles coïncident partout. Ceci garantit la continuité de u_h à travers $[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2]$. On a donc démontré que $u_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. \square

3 Fonctions de forme

En notant $|\mathcal{S}_h| = \text{card}(\mathcal{S}_h)$, la proposition précédente affirme que l'application $\Phi_h : V_h \rightarrow \mathbb{C}^{|\mathcal{S}_h|}$ définit par $\Phi_h(u) = (u(\mathbf{s}))_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}$ est un isomorphisme. Au vu de ce résultat il est donc naturel de considérer la base de V_h qui est mise en correspondance avec la base canonique de $\mathbb{C}^{|\mathcal{S}_h|}$ via cet isomorphisme. On définit donc $\varphi_{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$ comme l'unique élément de V_h vérifiant

$$\varphi_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}') = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{s} = \mathbf{s}', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce qui précède permet alors d'affirmer que toute fonction $u_h \in V_h$ se décompose de la manière suivante

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h} u_h(\mathbf{s}) \varphi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$$

La famille $(\varphi_{\mathbf{s}})_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}$ constitue une base de V_h que l'on nomme fonctions de forme, et qui engendre l'espace variationnel discret

$$V_h = \text{span}\{\varphi_{\mathbf{s}}\}_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h}.$$

Les fonctions de forme $\varphi_{\mathbf{s}}$ jouent un rôle central dans l'implémentation de la méthode des éléments finis. Il est important de bien comprendre la forme qu'elles prennent. Ces fonctions sont localisées: le résultat suivant nous dit que leur support est contenu dans un paquet de triangles ayant un même noeud en commun.

Lemma 3.1.

On a $\text{supp}(\varphi_{\mathbf{s}}) = \{\tau \in \mathcal{T}_h, \mathbf{s} \in \mathcal{S}(\tau)\}$.

En effet, pour un $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_h$ fixé, et pour un $\tau \in \mathcal{T}_h$ tel que $\mathbf{s} \notin \mathcal{S}(\tau)$, on a $\varphi_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}') = 0$ pour tout $\mathbf{s}' \in \mathcal{S}(\tau)$ par définition de $\varphi_{\mathbf{s}}$, et donc $\varphi_{\mathbf{s}} = 0$ sur τ puisque $\varphi_{\mathbf{s}}|_{\tau} \in \mathbb{P}_1(\tau)$. Le corollaire du lemme ci-dessus est que deux fonctions de forme attachées à des noeuds n'appartenant à un même triangle ont des supports qui ne s'intersectent pas.

Voyons un exemple. Considérons le maillage en haut à gauche de la figure ci-dessous. Ce maillage comprend huit noeuds que l'on note $\mathcal{S}_h = \{\mathbf{s}_j\}_{j=1\dots 8}$. On représente le support de la fonction de forme associée à chacun de ces noeuds.

